

Javító vizsga segédanyag 10. évfolyam

Kombinatorika

<https://www.youtube.com/watch?v=vUM5c4txS3w>

<https://www.youtube.com/watch?v=0j3USFK2md0>

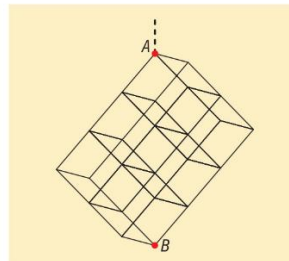
Gyakorló feladatok:

1. Hányféleképpen alkothat hatosfalat egy kézilabdacsapat pályán lévő 6 mezőnyjátékosa?
2. Peti észrevette, hogy az ajándékba kapott kisvasút négy különböző kocsiját akár a mozdony elé is kapcsolhatja. Hányféle sorrendben állíthatja össze így a mozdonyból és a négy különböző kocsiból álló szerelvényt Peti?
3. Érmegyűjtő Ernőnek az ábrán látható egyforma Lajos-aranyai és azonos Ferenc József korabeli ezüst koronái vannak. Hányféleképp teheti egymás mellé őket a vitrinben? Írjuk fel a lehetőségeket.



4. Robi DVD-gyűjteményében van négy családi vígjáték, hat sci-fi és két krimi (mind különböző).
 - a) Hányféleképpen teheti az összes filmet egymás mellé?
 - b) Hányféleképpen teheti őket sorba a polcra, ha az egyes típusú filmeket a feladat szövegében szereplő *vígjáték – sci-fi – krimi* sorrendben teszi egymás mellé?
 - c) Hányféleképpen teheti őket sorba a polcra, ha csak annyit tudunk, hogy az azonos fajta DVD-ket egymás mellé rakja?
 - d) Hányféleképp teheti őket egymás mellé, ha csak a filmek típusát vesszük figyelembe a sorba rakáskor? (Ebben az esetben a kategórián belüli filmeket nem különböztetjük meg.)
5. Egy kör alakú asztal mellett négy szék van: egy az ajtó felől, egy az ablak alatt, egy a fal mellett és egy a kandalló előtt. Számoljuk ki, hányféleképp foglalhat helyet az asztal körül négy fő, ha:
 - a) figyelembe vesszük, hogy ki ül az ajtó, az ablak, a fal, illetve a kandalló felől.
 - b) csak az asztal melletti sorrendjüket vesszük figyelembe valamilyen körbejárás szerint.
 - c) csak annyit vesszük figyelembe, hogy ki kinek a szomszédja.

6. Peti szobájában, az egyik sarkánál fogva, az ábrán látható hurkapálcából készült rács lóg a plafonról. Egy kis katicabogár a szag-gatottal jelölt kötélén mászik le. Elérve a rácsot az *A* csúcsban megpihen, majd választ a lefelé vivő lehetőségek közül. Minden rácsponthoz ugyanazt teszi. Hány különböző úton juthat le *A*-ból *B*-be, ha lefelé haladva mindig közelebb kerül a *B* csúcshoz?



7. Az ábrán látható egyszerű számszár minden tárcsája 1-től 9-ig van számozva. Hány különböző beállítás lehetséges ezen a záron?



8. Egy dobókockával addig dobunk, míg prímszámot nem kapunk. A kapott prímet feljegyezzük. Ezt megismétljük még háromszor, a prímekeket sorban egymás után írva. Hány különböző négyjegyű szám lehet az eljárás eredménye?
9. A magyar kártya 4 színt, és színenként 4 különböző számozott és 4 különböző figurás kártyalapot tartalmaz. Hányféleképpen tehetjük sorba a 32 darabos magyar kártyacsomag lapjait, ha:
 - a) minden lapot figyelembe veszünk külön-külön;
 - b) csak a színeket vesszük figyelembe;
 - c) a figurákat és a számokat vesszük figyelembe?
10. A fogorvosi rendelő 7:30-kor nyitott. Most háromnegyed nyolc van és 17-en várnak. Bizonyítsuk be, hogy volt két páciens, akiknek az érkezése között nem telt el egy perc.

Gyökvonás

https://www.youtube.com/watch?v=BVvs1BROeAY&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=5

https://www.youtube.com/watch?v=GOL5YYkNCPk&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=4

https://www.youtube.com/watch?v=rboLYRyXvLg&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=3

Gyakorló feladatok:

1. Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a) $\sqrt{2x-1}$; b) $\sqrt{2x}-1$; c) $\sqrt{-x}$; d) $\sqrt{6-4x}$;
e) $\sqrt{6-4x}$; f) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{1-x}$; g) $\sqrt{\frac{5x-1}{x+3}}$; h) $\frac{\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+3}}$;

2. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$; d) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$;
e) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; f) $\sqrt{75} \cdot \sqrt{3}$; g) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; h) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$;
i) $\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}$; j) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5^3}$; k) $\sqrt{2^5} \cdot \sqrt{2^3}$; l) $\frac{\sqrt{7^3}}{\sqrt{7^5}}$;

3. A műveletek elvégzésével döntjük el, hogy melyik szám a nagyobb:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$ vagy $\sqrt{15} \cdot \sqrt{3}$; b) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{7}$ vagy $\sqrt{6} \cdot \sqrt{13}$;
c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}$ vagy $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}}$; d) $\frac{\sqrt{140}}{\sqrt{7}}$ vagy $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$;
e) $\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{5}}$ vagy $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$; f) $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{6}}$ vagy $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{5}}$;
g) $\frac{\sqrt{184}}{\sqrt{8}}$ vagy $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$; h) $\frac{(\sqrt{3})^5}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ vagy $\sqrt{\frac{18}{5}} \cdot \frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{15}}$;

4. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{5-\sqrt{21}} \cdot \sqrt{5+\sqrt{21}}$; b) $\sqrt{\sqrt{29}+2} \cdot \sqrt{\sqrt{29}-2}$;
c) $\sqrt{7+\sqrt{24}} \cdot \sqrt{7-\sqrt{24}}$; d) $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{3}}$;
e) $\sqrt{\sqrt{31}-\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{31}+\sqrt{6}}$; f) $(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})^2$;
g) $(\sqrt{8-\sqrt{15}} + \sqrt{8+\sqrt{15}})^2$; h) $(\sqrt{11+\sqrt{21}} - \sqrt{11-\sqrt{21}})^2$;

5. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{72} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$; b) $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$;
c) $\sqrt{125} - \sqrt{45} - \sqrt{20}$; d) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$;
e) $\sqrt{12} + \sqrt{108} - \sqrt{147}$; f) $(\sqrt{27} + \sqrt{2} - \sqrt{12}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{18})$;
g) $(\sqrt{80} - \sqrt{3} - \sqrt{45}) \cdot (\sqrt{75} + \sqrt{5} - \sqrt{48})$;
h) $(\sqrt{98} + \sqrt{108} - \sqrt{8} - \sqrt{147}) \cdot (\sqrt{32} - \sqrt{48} + \sqrt{75} + \sqrt{2})$;

6. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{9}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{12}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{21}{\sqrt{7}}$;
e) $\frac{3}{2 \cdot \sqrt{6}}$; f) $\frac{6}{5 \cdot \sqrt{3}}$; g) $\frac{14}{3 \cdot \sqrt{7}}$; h) $\frac{13}{3 \cdot \sqrt{10}}$;

7. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

a) $\frac{8}{\sqrt{5}+2}$; b) $\frac{12}{\sqrt{3}-1}$; c) $\frac{15}{2-\sqrt{7}}$; d) $\frac{10}{\sqrt{6}+1}$;
e) $\frac{22}{2 \cdot \sqrt{3}-1}$; f) $\frac{11}{3 \cdot \sqrt{2}-\sqrt{17}}$; g) $\frac{10}{4 \cdot \sqrt{2}+3 \cdot \sqrt{3}}$; h) $\frac{67}{5 \cdot \sqrt{7}-6 \cdot \sqrt{3}}$;

8. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\frac{3 \cdot \sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} - \frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{5+4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2-2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;
c) $\frac{4-2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{3 \cdot \sqrt{5}-1}{2 \cdot \sqrt{5}}$; d) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;
e) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; f) $\frac{3 \cdot \sqrt{2}+4}{3 \cdot \sqrt{2}-4} + \frac{3 \cdot \sqrt{2}-4}{3 \cdot \sqrt{2}+4}$;

9. Mennyi a következő gyökvonások eredménye?
 a) $\sqrt[3]{27}$; b) $\sqrt[3]{-1}$; c) $\sqrt[3]{-32}$; d) $\sqrt[3]{-64}$;
 e) $\sqrt[4]{81}$; f) $\sqrt[4]{625}$; g) $\sqrt[4]{10000}$; h) $\sqrt[3]{343}$;
10. Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő műveleteket ($x, y, a, b > 0$):
 a) $\sqrt[3]{45 \cdot 75}$; b) $\sqrt[3]{972} \cdot \sqrt[3]{8}$; c) $\sqrt[4]{8 \cdot 36} \cdot \sqrt[4]{36 \cdot 2}$; d) $\sqrt[5]{5^4 \cdot 3^3} \cdot \sqrt[5]{5^2 \cdot 3^3}$;
 e) $\sqrt[3]{\frac{ab}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{24b^2}{a}}$; f) $\sqrt[5]{\frac{x^2y}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^3y^4}{16}}$; g) $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{2}$; h) $\sqrt[3]{\frac{8}{3}} : \sqrt[3]{\frac{9}{8}}$;
11. Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő számításokat:
 a) $\sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}}$; b) $\sqrt[3]{9 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{17}}$;
 c) $\sqrt[3]{\sqrt{131} - \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{131} + \sqrt{6}}$; d) $\sqrt[3]{\sqrt{41} - 7} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{41} + 7}$;
 e) $\sqrt[4]{6 - \sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6 + \sqrt{20}}$; f) $\sqrt[4]{90 - 3} \cdot \sqrt[4]{90 + 3}$;
12. Döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb:
 a) $2 \cdot \sqrt[3]{23}$ vagy $3 \cdot \sqrt[3]{7}$; b) $3 \cdot \sqrt[3]{5}$ vagy $2 \cdot \sqrt[3]{17}$;
 c) $3 \cdot \sqrt[3]{51}$ vagy $5 \cdot \sqrt[3]{11}$; d) $3 \cdot \sqrt[3]{5}$ vagy $2 \cdot \sqrt[3]{25}$;
13. Végezzük el a következő összevonásokat:
 a) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{250}$; b) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{135}$;
 c) $\sqrt[4]{1875} - \sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48}$; d) $\sqrt[4]{162} + \sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{32}$;
14. Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők. Írjuk fel egyetlen gyökjellel a kifejezéseket.
 a) $\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[4]{7}}$; b) $\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[4]{7}}$; c) $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3}}$; d) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$;
 e) $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^5}}$; f) $\sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt[3]{b}}$; g) $\sqrt[3]{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}$; h) $\sqrt{x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}$;
15. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőit:
 a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; b) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$; c) $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$; d) $\frac{15}{\sqrt[4]{3^3}}$; e) $\frac{25}{\sqrt[3]{5^2}}$; f) $\frac{12}{\sqrt[3]{2}}$;
16. Egy befektetésnél az a tapasztalat, hogy havonta az átlagos haszon a befektetés harmadik gyökével arányos.
 a) Mennyi az arányossági tényező, ha 1 000 000 Ft befektetése esetén átlagosan 500 Ft a havi haszon?
 b) Mennyi lesz a haszon havonta, ha 2 000 000 Ft-ot fektetünk be?
 c) Mekkora legyen a befektetésünk, ha havonta 1 500 Ft-os haszonhoz szeretnénk jutni?

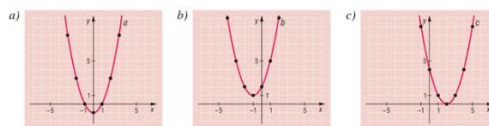
A másodfokú egyenlet

<https://zanza.tv/matematika/szamtan-algebra/masodfoku-egyenlet-megoldokeplete>

https://www.youtube.com/watch?v=b4HQC6ZYHjk&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=2

Gyakorló feladatok:

1. Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezéseket:
 a) $x^2 - 2x + 4$; b) $x^2 - 6x + 10$; c) $x^2 + 4x + 1$;
 d) $x^2 - 12x + 11$; e) $x^2 + 16x + 4$; f) $x^2 - 20x + 7$;
 g) $x^2 - 3x + 2$; h) $x^2 + 5x + 1$; i) $2x^2 - 8x + 13$;
2. Ábrázoljuk az alábbi, valós számokon értelmezett függvényeket. Adjuk meg a függvények zérushelyeit és szélsőértékeit.
 a) $a(x) = x^2 - 8x + 18$; b) $b(x) = x^2 + 2x - 3$; c) $c(x) = x^2 - 2x - 8$;
 d) $d(x) = x^2 + 10x + 24$; e) $e(x) = x^2 - 10x + 25$; f) $f(x) = x^2 - 12x + 27$;
3. Írjuk fel annak a másodfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja az ábrán látható. Állapítsuk meg a függvények zérushelyeit.
4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:
 a) $x^2 - 5x = 0$; b) $x^2 + 7x = 0$; c) $x^2 + 3x = 0$;
5. Oldjuk meg teljes négyzetté alakítással a következő egyenleteket:
 a) $x^2 - 6x + 8 = 0$; b) $x^2 + 4x - 12 = 0$; c) $x^2 + 8x + 12 = 0$;
6. Oldjuk meg a megoldóképlet felhasználásával a következő egyenleteket:
 a) $x^2 + 3x - 4 = 0$; b) $x^2 + 4x - 5 = 0$; c) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
 d) $x^2 - 4x - 21 = 0$; e) $2x^2 - 5x - 12 = 0$; f) $2x^2 - 20x + 50 = 0$;
7. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:
 a) $(x + 2) \cdot (2x - 3) + x - 4 = -6$; b) $(x + 1) \cdot (x - 2) - 3 \cdot (x + 5) = 3 - 5x$;
 c) $(3x + 1) \cdot (2x - 3) - 2 \cdot (x + 1) = 7x + 1$; d) $(2x + 1) \cdot (x - 4) - (x + 2) \cdot (3x - 4) = -6x$;



Másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek

https://www.youtube.com/watch?v=m83iYh994w8&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=1

Gyakorló feladatok:

- Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:
a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; c) $x^4 + x^2 - 20 = 0$;
d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; e) $x^4 - 20x^2 - 125 = 0$; f) $x^4 + 11x^2 + 28 = 0$;
g) $64x^4 - 20x^2 + 1 = 0$; h) $25x^4 + 74x^2 - 3 = 0$; i) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$;
j) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$; k) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$; l) $x^6 - 4x^3 - 5 = 0$.
- Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:
a) $(x-2)^4 - 5 \cdot (x-2)^2 + 4 = 0$; b) $(x+3)^4 - 7 \cdot (x+3)^2 - 18 = 0$;
c) $(x+5)^4 - 13 \cdot (x+5)^2 - 48 = 0$; d) $36 \cdot (x-3)^4 - 13 \cdot (x-3)^2 + 1 = 0$.

Másodfokú egyenletrendszerek

<https://www.youtube.com/watch?v=bp0JTP6FzOg>

Gyakorló feladatok:

- Mely valós számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszereket?
a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2+y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-y=4 \\ 3x-y^2=8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2-2y=2 \\ x+3y=5 \end{cases}$;
d) $\begin{cases} 2x^2+3y=-1 \\ x-5y=6 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x+y=7 \\ x \cdot y=10 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x \cdot y=6 \end{cases}$;
g) $\begin{cases} x+3y=7 \\ x \cdot y=2 \end{cases}$; h) $\begin{cases} y-4x=9 \\ x \cdot y=-2 \end{cases}$; i) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2+5y=14 \end{cases}$;

Másodfokú egyenlőtlenségek

https://www.youtube.com/watch?v=AQSBqtnMsNQ&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=12

Gyakorló feladatok:

- Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:
a) $x^2 - 49 > 0$; b) $x^2 - 100 \leq 0$; c) $x^2 - 36 \geq 0$;
d) $x^2 - 400 < 0$; e) $x^2 + 114 \geq 0$; f) $x^2 + 2 \leq 0$;
g) $x^2 - 15 \leq 0$; h) $x^2 - 7 \geq 0$; i) $x^2 + 3x \geq 0$;
- Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:
a) $x^2 + 6x - 7 < 0$; b) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$; c) $x^2 - 9x + 18 < 0$;
d) $x^2 - 8x + 19 \leq 0$; e) $x^2 + 7x + 6 > 0$; f) $x^2 + 6x + 10 > 0$;
g) $2x^2 - x - 6 \leq 0$; h) $4x^2 + 12x + 5 < 0$; i) $3x^2 - 8x + 7 \geq 0$;
- Mely egész számok esetén teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:
a) $x^2 - 5x - 6 < 0$; b) $x^2 + x - 20 \leq 0$; c) $x^2 + 2x - 15 \leq 0$;
d) $x^2 + 6x + 10 > 0$; e) $x^2 + 2x - 35 \leq 0$; f) $-x^2 - x + 12 \geq 0$;

Négyzetgyökös egyenletek

https://www.youtube.com/watch?v=nvv-rtBxP7Q&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=13

https://www.youtube.com/watch?v=wqDnsNnkGoM&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=14

Gyakorló feladatok:

- Mely valós számok a megoldásai a következő egyenleteknek?
a) $\sqrt{x+4} = 3$; b) $\sqrt{x-5} = 9$; c) $\sqrt{2x-3} = 1$;
d) $3 + \sqrt{4x+3} = 0$; e) $7 - \sqrt{4x+11} = 0$; f) $\sqrt{8x-13} - 8 = 0$;
g) $\sqrt{4x-5} = \sqrt{x+1}$; h) $\sqrt{5x+1} = \sqrt{7x+1}$; i) $\sqrt{3x-4} = \sqrt{x-2}$;
- Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:
a) $\sqrt{x+6} = x$; b) $\sqrt{x+2} = x-4$; c) $\sqrt{3x+1} = x-1$;
d) $\sqrt{2x+8} = x+4$; e) $\sqrt{7-3x} = 1-x$; f) $\sqrt{3x+4} = 2x-4$;
g) $\sqrt{5x+4} = 2x+2$; h) $\sqrt{3x-5} = x-1$; i) $\sqrt{5x+5} = 2x-3$;

Másodfokú egyenletre vezethető szöveges feladatok

<https://zanza.tv/matematika/szamtan-algebra/szoveges-feladatok-negyzeten>

Gyakorló feladatok:

1. Két szám különbsége 12. Melyik ez a két szám, ha:
a) szorzatuk 45; b) négyzetösszegük 314;
c) a nagyobb számot a kisebbel osztva hányadosuk 10-zel kisebb, mint a kisebbik szám?
2. Két szám összege 20. Melyik ez a két szám, ha:
a) szorzatuk 36; b) négyzetösszegük 208;
c) négyzetük különbsége 200?
3. Ernő Liverpoolból sportrelikviákat hozott a barátainak ajándékba. A sapkák darabját annyi euróért vette, ahányat vásárolt. Ha 3 eurós poharakat vett volna, hárommal több embernek tud ajándékot hozni és még 1 euró meg is marad. Hány sapkát vásárolt Ernő?
4. Két négyzet területének összege 493 cm^2 . Az egyik négyzet oldala 5 cm-rel nagyobb, mint a másik négyzeté. Mekkora a négyzet oldalai?
5. Egy téglalap egyik oldala 3 dm-rel több a másik háromszorosánál. Az átló 1 dm-rel hosszabb, mint a nagyobb oldal. Mekkora a téglalap oldalai?
6. Egy társaság kerékpártúrán vesz részt. Az egyik napon 80 km-t haladtak. Ha óránként 4 km-rel többet tettek volna meg, 1 órával hamarabb értek volna célba. Mekkora sebességgel kerékpároztak és mennyi ideig tartott az út?
7. Két szomszédos szám szorzata 56-tal több, mint az összegük tízszerese. Melyik ez a két szám?
8. Eszter 4000 Ft-ért virágpalántákat vásárol. Ha a darabonként 90 Ft-tal olcsóbb petúniát választja 9-cel többet tud megvenni, mint a drágább muskátliból. Mennyibe kerül a muskátlipalánta, és hány darabot tud venni a pénzéből?
9. A téglalap alakú monitor képernyőjének oldalai 34 cm és 27 cm. A képernyő körül minden oldalon azonos szélességű műanyag keret van, melynek területe 28,5%-a a képernyő területének. Milyen széles a keret?
10. Egy autógyár két szerelőcsarnokában 400-400 darab egyforma gépkocsit szerelnek össze. A modernbb részleg naponta ötlet több autót képes elkészíteni, mint a másik. Hány napig dolgozott egyik-egyik üzemrész, és hány autót gyártottak naponta külön-külön, ha összesen 36 napot dolgoztak?

Geometria

Középponti és kerületi szögek

<https://www.youtube.com/watch?v=uOItoDqZRZY>

<https://www.youtube.com/watch?v=2RvtqhCQZEo>

<https://www.youtube.com/watch?v=kgJXkAE2bYY>

<https://www.youtube.com/watch?v=GBsdWjKiMNY>

<https://www.youtube.com/watch?v=JnsOI77432k>

Gyakorló feladatok:

1. Számítsuk ki a körcikk területét, valamint a határoló körív hosszát, ha a sugár 8 cm, a középponti szöge pedig
a) 15° ; b) 60° ; c) 115° ; d) 150° ; e) 270° ; f) 300° .
2. Mekkora kerületi szög nyugszik azon a köríven, amelyhez tartozó középponti szög nagysága
a) 16° ; b) 31° ; c) 70° ; d) 180° ; e) 210° ; f) 350° ?
3. Mekkora középponti szög nyugszik azon a köríven, amelyhez tartozó kerületi szög nagysága
a) 10° ; b) 35° ; c) 90° ; d) 150° ; e) 160° ; f) 175° ?
4. A kör egy rögzített körívéhez tartozó középponti szög 70° -kal nagyobb, mint a rajta nyugvó kerületi szög. Számítsuk ki a köríven nyugvó középponti és kerületi szögek nagyságát.
5. A kör egy húrja a kört két körszeletre bontja. A húr a kör középpontjából
a) 15° -os; b) 37° -os; c) 50° -os
szög alatt látszik. Mekkora szögben látszik a húr a kisebb körszeletet határoló körív pontjaiból?
6. A hegyesszögű ABC háromszög köré írt köréhez a háromszög csúcsaiban érintőket húzunk. Az érintőegyenesei által közrefogott háromszög két szöge 70° és 84° . Számítsuk ki az ABC háromszög szögeinek nagyságát.

Párhuzamos szelőszakaszok tétele

<https://erettsegi.com/video/matematika/a-parhuzamos-szelok-tetele-video-bizonyitas/>

Gyakorló feladatok:

- Egy O csúcspontú szög szárait két párhuzamos egyenessel elmetsettük úgy, hogy a csúctól számítva az egyik száron a metszéspontok rendre A, B , a másik száron pedig C, D . Töltsük ki az alábbi táblázat hiányzó rovatait, ha $OA = a$, $AB = b$, $OC = c$, $CD = d$, illetve $AC = x$ és $BD = y$.

a	b	c	d	x	y
5 cm	4 cm	3 cm		7 cm	
2 cm		3 cm		4 cm	9 cm
3 cm	6 cm		4 cm		8 cm
- Egy szimmetrikus trapéz alapjainak hossza 6 cm és 15 cm, szárai 7 cm hosszúak. Számítsuk ki a trapéz kiegészítő háromszögének oldalait.
- Egy derékszögű háromszögbe téglalapot írunk úgy, hogy a téglalap két szomszédos oldala egy-egy befogóra, egy további csúcsa pedig az átfogóra esik. Az átfogóra illeszkedő csúcs az átfogót 1 : 4 arányban osztja. Számítsuk ki a téglalap területét, ha a háromszög befogóinak hossza 16 cm és 30 cm. Hány különböző téglalap felel meg a feladat feltételeinek?
- Barnabás szeret kirándulni a hegyekben. Egyik alkalommal egy egyenes, meredek úton csak $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tudott felkapaszkodni a hegytetőre. Útja során két nagy fa mellett is elhaladt, amelyek egymástól 300 méterre voltak. Térképéről leolvasta, hogy az első fa 45 méter magas. Milyen magas a másik a fa, ha az első fától fél óra kellett, hogy a hegytetőre érjen, és onnan a két fa csúcsát pontosan egy vonalban látta?

Egybevágósági transzformációk

<https://zanza.tv/matematika/geometria/egybevagosagi-transzformaciok>

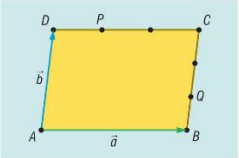
<https://zanza.tv/matematika/geometria/eltolas-es-pont-koruli-forgatas>

<https://zanza.tv/matematika/geometria/vektorok-bevezetese>

<https://zanza.tv/matematika/geometria/bazisvektor>

Gyakorló feladatok:

- Tükrözzük az $A(3; 1)$, $B(-2; 5)$, valamint a $C(-4; -2)$ pontok által meghatározott háromszöget az $a)$ x tengelyre; $b)$ y tengelyre.
Írjuk fel a tükrökép csúcsainak koordinátáit.
- Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 30° -os, akkor a háromszög egyik befogója feleakkora, mint az átfogója.
- Az ABC háromszögben a B csúcsnál 30° -os szög, az A csúcsnál tompaszög van. Jelölje az A , B , C pontoknak a háromszög C csúcsából induló magasságvonalára vonatkozó tükröképét rendre A' , B' és C' . Igazoljuk, hogy ha az ACB szög 90° -os, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.
- Tükrözzük az $A(3; 1)$, $B(-2; 5)$, valamint a $C(-4; -2)$ pontok által meghatározott háromszöget az $a)$ origóra; $b)$ a $(0; 4)$ koordinátájú pontra;
 $c)$ az $(1; 1)$ koordinátájú pontra; $d)$ a $(2; -1)$ koordinátájú pontra;
 $e)$ a $(-1; -2)$ koordinátájú pontra; $f)$ a $(-1; 7)$ koordinátájú pontra.
Írjuk fel a tükrökép csúcsainak koordinátáit.
- Az alábbi állításokról döntünk el, hogy melyik igaz, melyik hamis.
 - Nincs középpontosan szimmetrikus háromszög.
 - A középpontosan szimmetrikus négyszögek mind konvexek.
 - Van olyan középpontosan szimmetrikus négyszög, amelyik konkáv.
 - Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor átlói egyenlők.
 - Ha egy négyszög átlói egyenlők, akkor a négyszög középpontosan szimmetrikus.
 - A középpontosan szimmetrikus négyszög átlói felezik egymást.
 - A középpontosan szimmetrikus négyszögben van két egyenlő nagyságú szög.
 - Van olyan tengelyesen szimmetrikus sokszög, amelyik középpontosan is szimmetrikus.

6. Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.
- Van olyan háromszög, amelyik forgásszimmetrikus.
 - Ha egy háromszög forgásszimmetrikus, akkor egyenlő szárú.
 - Ha egy síkidom forgásszimmetrikus, akkor végtelen sok olyan szög adható meg, amellyel az alakzat önmagába forgatható.
 - Ha egy síkidom forgásszimmetrikus, akkor van olyan legkisebb pozitív szög, amellyel az alakzat a középpont körül elforgatva önmagába megy át.
 - Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor középpontosan szimmetrikus.
 - Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor forgásszimmetrikus is.
 - Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor szabályos.
 - Minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus.
7. Toljuk el az $A(3; 1)$, $B(-2; 5)$, valamint a $C(-4; -2)$ pontok által meghatározott háromszöget az
- $(1; 3)$ vektorral; $b) (-2; 5)$ vektorral; $c) (-4; -3)$ vektorral.
- Írjuk fel a képháromszög csúcsainak koordinátáit.
8. Toljuk el az $A(-1; -3)$, $B(5; 2)$, valamint a $C(1; 7)$ pontok által meghatározott háromszöget a $(2; 4)$ vektorral. A kapott háromszöget azután toljuk el a $(-3; -2)$ vektorral; a képháromszög csúcsait jelölje A' , B' , valamint C'' .
- Írjuk fel a második eltolás után kapott háromszög csúcsainak koordinátáit.
 - Mutassuk meg, hogy ha az ABC háromszögre a két eltolást fordított sorrendben alkalmazzuk, akkor is az $A''B''C''$ háromszöget kapjuk eredményül.
 - Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög egyetlen eltolással átvihető az $A''B''C''$ háromszögbe, valamint adjuk meg az eltolás vektorának koordinátáit.
9. A koordináta-rendszer $A(-3; 8)$ pontjának helyvektora $\vec{a}$. Ábrázoljuk a következő vektorokat. Határozzuk meg a vektorok koordinátáit:
- $\vec{a}$; $b) \frac{3}{2} \cdot \vec{a}$; $c) \frac{1}{4} \cdot \vec{a}$; $d) -\vec{a}$; $e) -\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$.
10. Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$. A hatszög középpontja O . Írjunk fel a hatszög csúcsaival és középpontjával legalább két-két olyan vektort, amely egyenlő az alábbi vektorokkal:
- $\vec{a}$; $b) \vec{b}$; $c) \vec{a} + \vec{b}$; $d) \vec{a} - \vec{b}$.
11. Az $ABCD$ paralelogrammában $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. Az ábrán a paralelogramma két oldalának egy-egy harmadolópontját megjelöltük.
- 
- Fejezzük ki az $\vec{AP}$, illetve $\vec{AQ}$ vektorokat az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével.
 - Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakasz párhuzamos a paralelogramma DB átlójával.
 - Számítsuk ki a $\frac{PQ}{DB}$ tört értékét.
 - Fejezzük ki az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével az A pontból a PQ szakasz felezőpontjába mutató vektort.
 - Bizonyítsuk be, hogy az A pont és a PQ szakasz felezőpontja közti szakasz párhuzamos a paralelogramma AC átlójával.

Háromszögek nevezetes pontjai és vonalai

<https://www.youtube.com/watch?v=dpVcbrfBJk>

Gyakorló feladatok:

- Fejezzük ki a következő alakzatok középvonalainak hosszát az alakzat oldalainak segítségével:
 - háromszög; $b)$ paralelogramma;
 - trapéz (a szárak felezőpontját összekötő középvonal esetén).
- Peti egy kartonból kivágott háromszöget a középvonalai mentén feldarabolt, így négy kisebb háromszöget kapott. A négy háromszög területét megmérte, majd az eredményeket összeadta, így összegként 57 cm-t kapott. Mekkora az eredeti háromszög területe?
- Hogyan lehet egy háromszög alapú gesztenyetortát négy testvér között egyenes vágásokkal felosztani, ha azt akarjuk, hogy a testvérek által kapott szeletek pontosan ugyanolyan méretűek legyenek? Válaszunkat indokoljuk.
- Peti kartonból kivágott egy paralelogrammát, amelynek egyik oldala 12 cm, majd a paralelogrammát egyik középvonala mentén két részre vágta. A kapott két négyszög területének összege 74 cm. Mekkora lehet az eredeti paralelogramma másik oldala?

5. A háromszög alakú Nagyerdő oldalai 3 km, 4 km, 6 km. Az erdő belseje egy vadászkunyhót rejt, amelyet az erdő minden csúcsával egyenes út köt össze. Minden út felezőpontjába egy-egy magasles épült, amelyek közül bármely kettőt szintén egyenes ösvénnyel kötötték össze. A vadász minden reggel autóval elmegy az egyik magasleshez, majd gyalog végigjárja valamennyit. Sétája közben végig a kiépített ösvényen halad. Hány percig tart a vadásznak a magaslesek érintő séta, ha óránként 4 km-t tud megtenni?
6. Béla bácsi háromszög alakú kertjének két csúcsát egyenes út köti össze a szemközti oldal felezőpontjával. A telek körüli kerítés felújításakor Béla bácsi lemérte a két út hosszát. Eredményül 24 métert, illetve 30 métert kapott. Közben megállapította, hogy a két út derékszögben metszi egymást. A számításokat egy tízedesjegy pontossággal elvégezve válaszoljunk az alábbi kérdésekre.
 - a) Mekkora a telek oldalai?
 - b) Mennyi kerítés szükséges a telek körbekerítéséhez?

Hasonlósági transzformációk

<https://zanza.tv/matematika/geometria/egybevago-es-hasonlo-alakzatok>

<https://zanza.tv/matematika/geometria/hasonlosag>

<https://zanza.tv/matematika/geometria/hasonlosagi-transzformacio>

<https://zanza.tv/matematika/geometria/hasonlo-sikidomok-es-testek>

Gyakorló feladatok:

1. Vegyünk fel egy háromszöget, valamint a belsejében egy pontot. Kicsinyítsük a háromszöget az adott pontból a
 - a) felére;
 - b) harmadára;
 - c) $-\frac{1}{2}$ -szeresére.
2. Vegyünk fel egy háromszöget, valamint a háromszögön kívül egy pontot. Nagyítsuk a háromszöget a pontból a
 - a) kétszeresére;
 - b) -2 -szeresére.
3. Zsuzsi gyalogtúrát tervez barátaival. Turistatérképén lemérve a tervezett útvonal hossza 57 cm. Mennyi idő alatt teszi meg a társaság a kiválasztott túraútvonalat, ha óránként átlagosan 3,8 km-t haladnak, továbbá Zsuzsi térképe 1 : 40 000 méretarányú?
4. Az alábbi állításokról döntünk el, hogy melyik igaz, melyik hamis.
 - a) Bármely két szabályos háromszög hasonló.
 - b) Bármely két kör hasonló.
 - c) Ha két egyenlő szárú háromszögben egy-egy szög megegyezik, akkor a két háromszög hasonló.
 - d) Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha száraik által bezárt szögiük egyenlő.
 - e) Ha két téglalapban az átlók ugyanakkora szöget zárnak be, akkor a téglalapok hasonlóak.
 - f) Két rombusz hasonló, ha átlóik aránya megegyezik.
 - g) Két négyszög hasonló, ha megfelelő szögeik megegyeznek.
 - h) Ha két szabályos sokszögnek ugyanannyi oldala van, akkor a két sokszög hasonló egymáshoz.
5. Egy háromszög oldalai 3 cm, 4 cm, illetve 6 cm. Mekkora a hozzá hasonló háromszög oldalai, ha a
 - a) területe 19,5 cm²;
 - b) legrövidebb oldala 10,5 cm;
 - c) leghosszabb és legrövidebb oldalának különbsége 6 cm;
 - d) leghosszabb és legrövidebb oldalának összege 45 cm?
6. Egy trapéz két alapjának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3 : 7-hez, valamint egyik szára 20 cm. Milyen távolságra van a trapéz kiegészítő háromszögének trapézon kívüli csúcsa az ismert szár rövidebb alapra illeszkedő végpontjától?

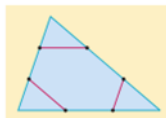
Arányossági tételek a háromszögben és a körben -befogótétel, magasságtétel

https://www.youtube.com/watch?v=xaxv6yirm0c&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=15

<https://zanza.tv/matematika/geometria/nevezetes-tetelek-derekszogu-haromszogben>

Gyakorló feladatok:

1. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 3 cm, illetve 5 cm. Mekkora részekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót? Mekkora távolságra van a derékszögű csúcs az átfogótól?
2. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót két olyan szakaszra bontja, amelyek hossza 8 cm, illetve 24 cm. Mekkora a háromszög befogói?
3. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz alapjai: $AB = 15$ cm, $CD = 5$ cm. A trapéz AC átlója merőleges a trapéz BC szájára. Számítsuk ki a trapéz területét.
4. Adott körhöz egy külső pontból 10 cm hosszúságú érintő húzható. A ponton át olyan szelőt húzunk a körhöz, amelynek rövidebb szelőszakasza és húrja úgy aránylik egymáshoz, mint 1 : 3-hoz. Számítsuk ki a szelőszakaszok hosszát.
5. Egy derékszögű háromszög befogói 15, illetve 36 cm hosszúak.
 - a) Mekkora részekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót?
 - b) Számítsuk ki az átfogóhoz tartozó szögfelező hosszát.
 - c) Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát.
 - d) Mekkora távolságra van a háromszögbe írható kör középpontja a derékszögű csúcsától?
6. Egy háromszög alakú virágágyásba négyféle virágot szeretnénk ültetni, ezért azt az oldalak harmadolópontjai mentén négy részre osztottuk. Liliomot a középső, hatszög alakú részbe ültetünk. Számítsuk ki, hogy ez hányadrésze a teljes virágágyásnak. (⇒)



Hegyszögek szögfüggvényei

<https://zanza.tv/matematika/geometria/hegyesszögek-szogfuggvenyei-i>

<https://zanza.tv/matematika/geometria/hegyesszögek-szogfuggvenyei-ii>

https://www.youtube.com/watch?v=hOV0NYlagKw&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=6

https://www.youtube.com/watch?v=hucHjAXWhUc&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=11

Gyakorló feladatok:

1. Egy 80 cm magas bot árnyéka 50 cm hosszú. Milyen magas az az épület, amelynek az árnyéka ugyanebben az időben
 - a) 25 m;
 - b) 40 m;
 - c) 70 m?
2. Egy csákányos sífelvonó, amely másodpercenként 2,8 m utat tesz meg, 3 perc 30 másodperc alatt ér fel a hegytetőre. Milyen magasra visz a felvonó, ha az emelkedési szög végig 30° ?

3. Jelölje a és b egy derékszögű háromszög befogóit, c pedig az átfogót. Az a oldallal szemben α , a b oldallal szemben β szög van.

Adjuk meg a táblázat hiányzó adatait ($x > y$ és x, y pozitív).

a	b	c	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} \beta$
9 cm	40 cm									
	35 m	37 m								
33 dm		65 dm								
2,1 km	5,4 km									
$x - y$	$2 \cdot \sqrt{x \cdot y}$									

4. Adjuk meg a következő hegyesszögek szinuszának, koszinuszának, tangensének és kotangensének értékeit négy tizedesjegy pontossággal:

a) $78^\circ 54'$; $28^\circ 12'$; $13^\circ 41'$;

b) $54,6^\circ$; $36,8^\circ$; $47,4^\circ$;

c) $\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{18}$; $\frac{2\pi}{5}$.

5. Határozzuk meg két tizedesjegy pontossággal az α , β , γ és δ hegyesszögeket, ha

a) $\sin \alpha = 0,0828$; $0,7843$; $0,5481$;

b) $\cos \beta = 0,4692$; $0,8753$; $0,9622$;

c) $\operatorname{tg} \gamma = 2,255$; $4,342$; $0,534$;

d) $\operatorname{ctg} \delta = 0,3553$; $3,456$; $1,397$.

6. Jelölje a és b egy derékszögű háromszög befogóit, c pedig az átfogót. Az a oldallal szemben α , a b oldallal szemben β szög van. Adjuk meg a táblázat hiányzó adatait.

a	b	c	α	β
41 cm	13 cm			
	12 cm	52 cm		
10 dm			12°	
		16 m		$54^\circ 12'$
		c	α	

7. Egy mélygarázsba vezető, egyenes lehajtó 8 m hosszú. Milyen mélyre visz a lehajtó, ha a lejtő a vízszintessel 17° -os szöget zár be?
8. Egy hegyi út emelkedése 12%. Milyen hosszú az út, ha 300 méter magasra visz?
9. Mekkora szögben érkeznek a napsugarak a talajra, ha egy függőleges rúd árnyéka 75%-a a rúd hosszának?
10. A szegedi fogadalmi templom toronyórája az előtte lévő tér szintje felett 72 méterre van. A torony lábától 50 méterre milyen emelkedési szögben látszik az óra?
11. Egy 3 m hosszú létrát a teherbíró képessége miatt csak úgy szabad a falhoz támasztani, hogy annak a vízszintessel bezárt szöge legalább 66° legyen. Legfeljebb mekkora távolságra lehet a létra alja a faltól?
12. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{5}{13}$, a területe $1,2 \text{ m}^2$.
- a) Mekkora ennek a hegyesszögnek a koszinusza?
- b) Mekkora a háromszög oldalai?

13. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 20 cm, szárai 25 cm hosszúak. Mekkora a háromszög szögei?
14. Egy óra 22 cm hosszú ingája két szélső helyzetében 17° -os szöget zár be. Mekkora az inga végpontjának két szélső helyzete közötti távolság?
15. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 42 cm, szárszöge 50° . Az alapot mindkét irányban a szár hosszával meghosszabbítjuk. Mekkora az így keletkezett háromszög oldalai?
16. Egy 24 cm sugarú körben levő 30 cm hosszú húrhoz mekkora középponti szög tartozik?
17. Egy háromszög egyik oldala 4 cm hosszú. Mekkora lehet az oldallal szemközti szög, ha a háromszög köré írt körének sugara 5 cm?
18. Egy háromszög két oldala 20 dm és 43 dm hosszú, az általuk közbezárt szög:
a) 72° ; b) 90° ; c) 130° .
Mekkora a háromszög területe?
19. Egy paralelogramma két oldalának hossza 10 cm és 42 cm. Az általuk bezárt szög:
a) 38° ; b) 90° ; c) 140° .
Mekkora a paralelogramma területe?
20. Egy háromszög két szöge 43° és 64° . A háromszög területe 120 cm^2 . Mekkora a háromszög köré írható körének a sugara?

Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között, nevezetes szögek szögfüggvényei

<https://www.youtube.com/watch?v=KgYjhD3NBfl>

<https://www.youtube.com/watch?v=it6KSnRRzx0>

Gyakorló feladatok:

1. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket (α hegyesszög):
a) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$; b) $(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha)$; c) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cos \alpha$;
 2. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:
a) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$; b) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;
 3. A táblázatban megadtuk néhány hegyesszög egy szögfüggvényének értékét. Adjuk meg a szögek többi szögfüggvényének értékeit a hegyesszögek kiszámítása nélkül ($0 < \alpha < 1$, $b > 1$).
- | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ |
|---------------|---------------|----------------------------|-----------------------------|
| $\frac{3}{5}$ | | | |
| | 0,2 | | |
| | | 4 | |
| | | | $\frac{1}{3}$ |
| a | | | |
| | | $\sqrt{b^2 - 1}$ | |
4. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét zsebszámológép használata nélkül:
a) $3 \cdot \sin 30^\circ + 3 \cdot \cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$; b) $\sin 30^\circ - (\cos 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ)^2$;
 5. Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét:
a) $\frac{1 - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}$; b) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$;
 6. Csak a definíció alapján, függvénytáblázat és zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki:
a) $2 \cdot \cos 0^\circ + 3 \cdot \sin 90^\circ + 4 \cdot \cos 180^\circ$; b) $5 \cdot \sin 270^\circ - 2 \cdot \cos 0^\circ + 3 \cdot \sin 90^\circ$;
c) $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$; d) $\sin 135^\circ \cdot \cos 225^\circ \cdot \sin 300^\circ \cdot \cos 120^\circ$;

Vektorok a koordináta rendszerben

<https://zanza.tv/matematika/geometria/muveletek-vektorkoordinatakkal>

<https://zanza.tv/matematika/geometria/helyvektor-szakasz-felezopontja>

<https://zanza.tv/matematika/geometria/helyvektorok-hasznalata>

Gyakorló feladatok:

- Szerkesszük meg a koordináta-rendszerben az alábbi helyvektorokat:
 $a) (4; 3); \quad b) (-1; 3); \quad c) (-4; -3,2); \quad d) (\sqrt{2}; 3); \quad e) \left(\frac{4}{3}; \sqrt{7}\right).$
- Legyen $\vec{a}(1; -3)$, $\vec{b}\left(-0,5; \frac{3}{2}\right)$ és $\vec{c}(5; 3,4)$. Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit:
 $a) \vec{a} + \vec{b}; \quad b) \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}; \quad c) 5 \cdot \vec{b} + \frac{3}{2} \cdot \vec{c}; \quad d) \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}.$
- Adjuk meg az $\overrightarrow{AB}$ vektort, ha:
 $a) A(4; 7) \text{ és } B(-9; 3); \quad b) A(9; -5) \text{ és } B(-8; 5);$
 $c) A(\sqrt{3}; 13) \text{ és } B(\sqrt{12}; 7); \quad d) A(a-1; 2b) \text{ és } B(2a-9; 5+b).$
- Az $A(-2; 4)$ pontot a koordináta-rendszerben eltoltuk a:
 $a) \vec{v}(5; 4); \quad b) \vec{v}(-2; 7); \quad c) \vec{v}(\sqrt{3}; 4); \quad d) \vec{v}(2; -4)$
vektorral. Adjuk meg az A pont képének koordinátáit.
- Egy kutyaszán elé három kutyát kötöttek, amelyek egyenként 200 N erővel húzzák a szánt. Ha köteleik 22° -os szöget zárnak be egymással, akkor számítsuk ki a kutyák által kifejtett eredő erő nagyságát.

Szögfüggvények

https://www.youtube.com/watch?v=oS3ZiZHBb0A&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=10

https://www.youtube.com/watch?v=xYV0TQPsmYc&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=9

https://www.youtube.com/watch?v=S35BVD124N0&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=8

https://www.youtube.com/watch?v=mN36wBAjT7g&list=PLCuQ3P3_1BSOeL2R6O_EYgMy0s5yfX1W&index=7

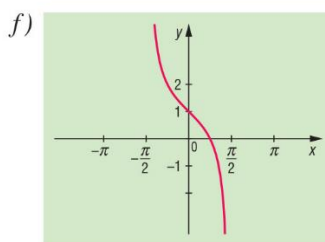
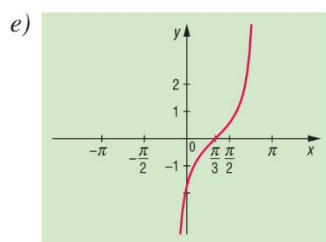
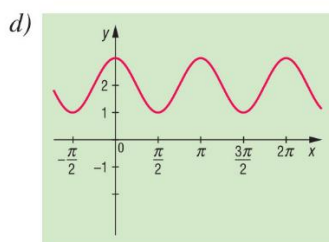
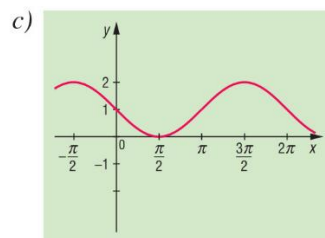
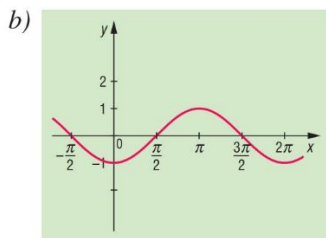
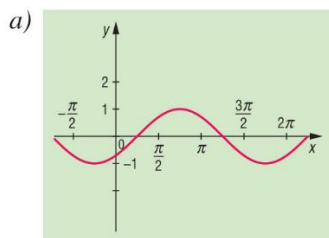
<https://www.youtube.com/watch?v=kYIAFFaxYjQ>

<https://www.youtube.com/watch?v=fXRT-5SpLvc>

Gyakorló feladatok:

- Ábrázoljuk a következő függvényeket:
 $a) x \mapsto \sin x + 1; \quad b) x \mapsto \sin x - 1; \quad c) x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$
- Ábrázoljuk az adott intervallumon a következő függvények grafikonját:
 $a) [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad b) [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$
 $c) [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right); \quad d) [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$
 $e) [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin 2x; \quad f) [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right);$
 $g) [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{2} \cdot x; \quad h) [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right).$

3. Ábrázoljuk és jellemezzük (növekedés, fogyás, szélsőérték szempontjából) a következő függvényeket:
- a) $[-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 \cdot \sin x - 1$; b) $[-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$;
4. Adjunk meg három különböző α szöget, amelyre igaz, hogy:
- a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; c) $\sin \alpha = \sin 53^\circ$; d) $\sin \alpha = \sin 200^\circ$.
5. Oldjuk meg a következő egyenleteket függvénygrafikonok felhasználásával:
- a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0,5$; c) $\sin 2x = 1$; d) $|\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. Oldjuk meg függvénygrafikonok segítségével a következő egyenlőtlenségeket:
- a) $\sin x \geq 0$; b) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin x < -2$;
7. Ábrázoljuk a következő függvényeket:
- a) $x \mapsto \cos x - 1$; b) $x \mapsto \cos x + 2$; c) $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
8. Ábrázoljuk és jellemezzük (növekedés, fogyás, szélsőérték szempontjából) a következő függvényeket:
- a) $[-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |\cos x| + 2$;
- b) $[-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$;
9. Oldjuk meg függvénygrafikonok felhasználásával:
- a) $\cos x = \frac{1}{2}$; b) $\cos x = 0$; c) $\cos x = 1$; d) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
10. Oldjuk meg függvénygrafikon segítségével a következő egyenlőtlenségeket.
- a) $\cos x > 0$; b) $\cos x \leq 1$; c) $\cos x \leq \frac{1}{2}$;
11. Ábrázoljuk a következő függvényeket:
- a) $x \mapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right), -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$; b) $x \mapsto \tan(x + \pi), -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$;
- c) $x \mapsto -\tan x, -\pi < x < \pi, x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$; d) $x \mapsto 1 + \cot x, 0 < x < \pi$;
12. Az alábbi ábrák trigonometrikus függvények grafikonjai. Írjuk fel a függvények hozzárendelési szabályát. Adjunk meg több megoldást is.



<https://www.youtube.com/watch?v=VNA9KfwwI50&t=738s>

<https://zanza.tv/matematika/valoszinuseg-statisztika/statisztika-i>

<https://zanza.tv/matematika/valoszinuseg-statisztika/statisztika-ii>

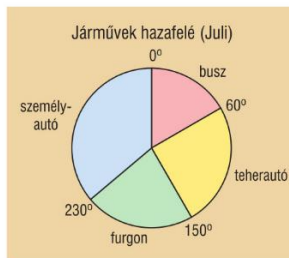
<https://zanza.tv/matematika/valoszinuseg-statisztika/statisztika-iii>

<https://zanza.tv/matematika/valoszinuseg-statisztika/statisztika-iv-statisztikai-mutatok>

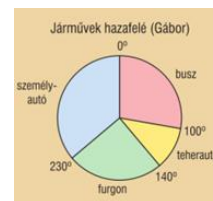
Gyakorló feladatok:

1. Egy biciklis futár hétfőn 85, kedden 110, szerdán 60, csütörtökön 73, pénteken pedig 40 kilométert kerékpározott. Ábrázoljuk oszlopdiagramon a naponta megtett kilométereket, és adjunk címet a diagramnak.

2. Juli hazafelé megszámolta, mennyi busz, teherautó, furgon és személyautó haladt el mellette. Ezekről készítette a bal oldali kördiagramot. Adjuk meg a Juli által látott járművek százalékos megoszlását.

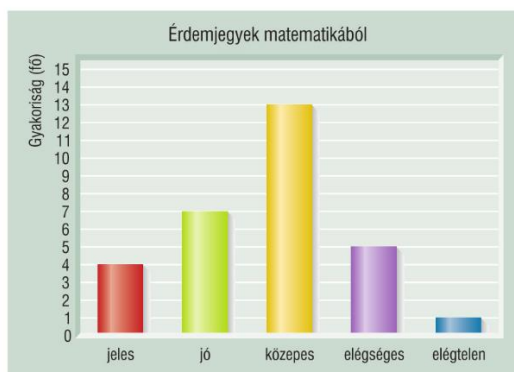


3. Gábor is megszámolta hazafelé a járműveket, és a jobb oldali kördiagramot készítette. Ám egy hét múlva csak arra emlékezett, hogy 20 darab buszt látott. Melyik fajtából mennyi járművet számolt meg Gábor? Készítsünk az adatokból táblázatot.



4. Az alábbi oszlopdiagram egy osztály tanulóinak év végi jegyeit mutatja matematikából.

- a) Készítsünk az adatokból gyakorisági táblázatot.
- b) Készítsünk az adatokból kördiagramot.



5. Szeptember első hetében a következő hőmérsékleteket mutatta a hőmérő reggel 6³⁰-kor, hétfőtől péntekig:
13,1 °C; 14,4 °C; 16,8 °C; 20,7 °C; 20,7 °C.
Számítsuk ki a hőmérsékletek átlagát.
6. Öt kezdő szumóbirkózó össztömege 7 és fél mázsa. Ha közéjük áll veterán edzőjük is, akkor átlagos tömegük 25kg-mal növekszik. Hány kilogrammot nyom a veterán edző?
7. Egy taxis ma 2, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 3, 4, 4, 3, 3, 1 utast szállított egy-egy fuvarral. Adjuk meg az egyszerre utazók számának mediánját.
8. A pékségben az elmúlt 15 percben megfordult vásárlók 4, 4, 6, 2, 6, 5, 6, 2, 5 darab túrós tászkát vásároltak. Adjuk meg a túrós tászkák darabszámának móduszát és terjedelmét.

9. Záráskor a pénzváltó boltjában megszámlálták a kasszában levő címleteket:

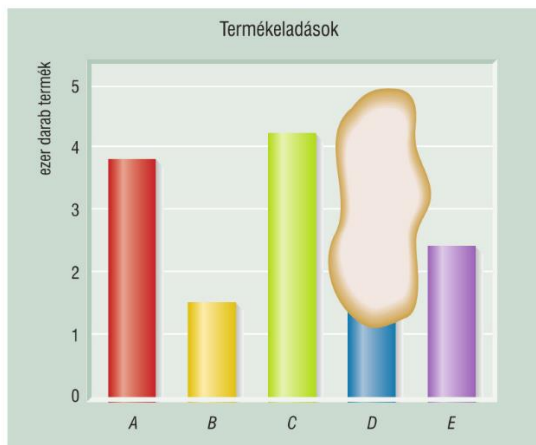
Címlet	5 €	10 €	20 €	50 €	100 €
Darab	33	62	56	19	25

- a) Mi a címletek módusza?
- b) A pénzváltónak eszébe jutott, hogy szüksége lesz hamarosan apróra, ezért beváltott a kasszából ugyanannyi 10-est és 20-ast nagyobb címletekre. Lehetséges-e, hogy a váltás után a kasszában maradó címletek módusza 5 lett?
10. Kati kémiaiából eddig a 3, 4, 3, 5 jegyeket kapta. Még egy dolgozatot fog írni. Legalább hányast kell szereznie, ha év végén 4-est szeretne, és a tanár csak 6 tized felett adja meg a jobb jegyet?
11. Két középiskolában összehasonlították a végzősök által az érettségien szerzett pontokat. Az egyikben 340 pont lett az átlag, a másikban 420. A két iskola összesített eredményeinek átlaga 360 pont volt. Hány tanuló érettségizett idén a két iskolában külön-külön, ha tudjuk, hogy az egyik iskolában 40-nel többen voltak, mint a másikban?

12. Zsolti talált egy érdekes diagramot az újságban, ám véletlenül leöntötte kávéval, és így az egyik oszlop eltűnt. Szerencsére a cikk szövegében szerepel néhány adat:

- az A termékből 3800 db-ot, a C-ből pedig 4200 db-ot adtak el idén;
- a vezető termékek (3000 darab felett) eladásainak átlaga 3900.

- a) Számítás alapján mondjuk meg, hány darabot adtak el a D termékből. Vezető terméknek minősül-e a D termék?
- b) Rajzoljuk meg most már a helyes oszlopdiagramot.



13. Egy osztályban a következő eredmények születtek az irodalomdolgozaton: 6 jeles, 9 közepes, 4 elégséges és 3 elégtelen. A dolgozatot írató Orsi néni a jó dolgozatok számára nem, csak arra emlékszik, hogy az átlag 3,32-nél határozottan nagyobb és 3,39-nél határozottan kisebb.
- a) Meg tudjuk-e ebből mondani, hány jó dolgozatot írtak és hányan vannak az osztályba járók?
- b) Segít-e pontosítani az adatokat, ha Orsi néninek eszébe jut, hogy a legalább közepest írók átlaga 3,87-nél kisebb?

14. Mennyi az alábbi adathalmazok szórása?

- a. 33, 45, 46, 48;
- b. 33, 33, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 46, 48.

15. Vegyük az alábbi a 2, 3, 4, 5, 2, 4, 4, 6, 8, 2, 6, 9, 2, 3, 7 adatsokaságot!

- a, Rendezd az adatokat növekedő sorrendbe!
- b, Ábrázold az adatok relatív gyakoriságát diagramon!
- c, Mennyi az adathalmaz terjedelme?
- d, Add meg az adathalmaz móduszát!
- e, Add meg az adathalmaz mediánját!
- f, Mennyi az adott számok átlaga?
- g, Mekkora az adathalmaz szórása?

<https://zanza.tv/matematika/valoszinuseg-statisztika/muveletek-esemenyekkel>

<https://zanza.tv/matematika/valoszinuseg-statisztika/valoszinuseg-szamitas>

<https://zanza.tv/matematika/valoszinuseg-statisztika/nagy-szamok-torvenye-valoszinuseg-fogalma>

<https://zanza.tv/matematika/valoszinuseg-statisztika/valoszinuseg-szamitas-gyakorlatban>

Gyakorló feladatok:

1.
 - a) Valószínűségi kísérletnek tekinthetők-e az alábbiak?
 - A tizenegyes rúgások gyakorlása a focipályán.
 - A hárompontos dobáskísérlet a kosárlabdában.
 - A nagymama eredeti görög vázájának laza könyökmozdulattal való leverése a polcról.
 - A pohárkészítő üzemből egy adott típusú sorozatban gyártott pohár alsó polcra való leverése.
 - b) Mit tekinthetünk a fenti kísérletek kimeneteleinek?
 - c) A kísérletek eredményéhez adjunk meg elemi eseményeket.
2. Tekintsük valószínűségi kísérletnek, hogy a hagyományos dobókockát háromszor feldobjuk, kimenetelének pedig a dobott számok összegét.
 - a) Adjuk meg az összes elemi eseményt.
 - b) Adjunk meg egy-egy biztos és lehetetlen eseményt az eseménytérben.
3. Egy érmét háromszor feldobunk.
 - a) Adjuk meg a következő események komplementereit.
$$A = \{\text{legalább egy fej}\},$$
$$B = \{\text{mind írás}\},$$
$$C = \{\text{pontosan kettő fej}\},$$
$$D = \{\text{legalább kettő egyforma}\}.$$
4. Az edzésen Géza 23 szabadrúgásból 12-szer, Tamás 19 kísérletből 7-szer, Ferenc 22-ből 13-szor volt eredményes.
 - a) Számítsuk ki a három fiú sikeres lövéseinek relatív gyakoriságát két tizedesjegyre kerekítve.
 - b) A relatív gyakoriságok alapján melyikükre kell bízni a szabadrúgások elvégzését?
5. Egy zárt dobozban piros, kék és sárga golyók vannak. A dobozból néhányszor kivesszünk egy-egy golyót, megnézzük, majd visszatesszük. Összesen 12 alkalommal piros, 8-szor kék és 20-szor sárga golyó akadt a kezünkbe.
 - a) Számítsuk ki a kihúzott golyók között az egyes színek relatív gyakoriságait.
 - b) Időközben megtudjuk, hogy a dobozban összesen 100 golyó van. Becsüljük meg a relatív gyakoriságok alapján, hogy hány darab piros, kék és sárga golyó lehet a dobozban.
6. Az A osztályban 13 tanulónak van piros tolla, 23-nak nincs. Az B osztályba 5-tel kevesebben járnak. Itt legfeljebb hány főnek lehet piros tolla, ha tudjuk, hogy az B -ben kisebb a piros tollak relatív gyakorisága?
7. Az utcán megkérdeztünk 45 embert arról, hogy szereti-e a túrós tésztát. 32 fő válaszolt igennel. Másik napon a harcsapaprikás után érdeklődtünk. Az eddig megkérdezett 24 főből 16-an válaszoltak igennel. Ha ezek után csak igen választ fogunk kapni, akkor még hány főt kell megkérdezni ahhoz, hogy a harcsapaprikást szerető relatív gyakorisága több legyen, mint a túrós tésztát szeretőké?
8. Viktóriának egy 5-ös, egy 10-es, két 20-as, egy 50-es és egy 100-as érme lapul a zsebében. Véletlenszerűen kivéve közülük egyet, mekkora valószínűséggel lesz a kivett érme 50-es?
9. Mekkora valószínűséggel lesz a hagyományos 90-ből 5-öt lottó sorsolásán az elsőre kihúzott szám 30-nál kisebb prím?

10. Egy zárt dobozban 40 golyó van, közülük 7 piros és 9 zöld. Egy golyót húzva a dobozból, mekkora valószínűséggel nem lesz sem piros, sem zöld?
11. Egy zsákban 36 zselés és 14 kókuszos szaloncukor van azonos csomagolásban. Mekkora valószínűséggel választ közülük Dani egy kókuszos szaloncukrot?

12. Egy osztályba 12 fiú jár. Tudjuk, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy tanulót, annak valószínűsége, hogy az illető lány, 0,6. Hány lány jár ebbe az osztályba?

13. Géza egy zárt dobozban tartja ólomkatonáit. Tizenhárom amerikai, hét angol és néhány német katonája van. Annak a valószínűsége, hogy egyet véletlenül kivéve az német lesz, 0,2. Hány német ólomkatonája van Gézának?

14. A kördiagram az angol első osztályú labdarúgó-bajnokság góllövőlistát vezető játékosairól készült. Mennyi a valószínűsége, hogy egy főt véletlenül kiválasztva a legalább 5 gólt lövő játékosok közül, az pontosan 7 gólt rúgott? (Forrás: Official Premier League Statistics, 2008. december 1.)



15. Három érmét egyszerre feldobva mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy fej?
Segítség: dobjunk három különböző érmével!

16. A 32 lapos magyar kártyából húzunk sorban egymás után négy lapot.
- Mekkora valószínűséggel húzunk piros, tők, zöld és makk színűt ebben a sorrendben, ha a kivett lapot nem tesszük vissza?
 - Nő vagy csökken ez a valószínűség, ha minden húzás után visszatesszük a lapokat? Adjuk meg számszerűen a változás mértékét.

17. A 32 lapos magyar kártyából húzunk 5 lapot, és feljegyezzük őket sorban egymás után. Mekkora valószínűséggel kapunk végül 3 pirosat és 2 tőköt, ha a lapokat:

- nem tesszük vissza;
- minden húzás után visszatesszük?

Feltételezzük, hogy az újabb lapot minden esetben véletlenszerűen húzzuk (pl. újakeverjük a csomagot).

18. Egy 38 fős osztályban arról beszélgetnek, ki milyen gyümölcsöt szeret. 18-an mondják a barackot, 20-20 fő pedig a körtét, illetve az erdei szedret. 8-an vannak, akik a barackot és a körtét is szeretik, ugyanennyien szeretik a körtét és az erdei szedret. A barack és az erdei szeder 7 ember kedvence, de 3 fő szereti mindhárom gyümölcsöt. Mekkora a valószínűsége, hogy kiválasztva egy főt az osztályból, az illető:

- csak és kizárólag az erdei szederért van oda;
- pontosan egy gyümölcsöt szeret;
- legfeljebb két gyümölcsöt szeret?